SÉRIES NUMÉRICAS E SÉRIES DE POTÊNCIAS

TEORIA DA CONVERGÊNCIA

SÉRIES NUMÉRICAS E SÉRIES DE POTÊNCIAS

TEORIA DA CONVERGÊNCIA

José Salazar

Capa: José Salazar

ISBN: 9789403872704

Este livro foi produzido em conformidade com as diretivas GPSR da União Europeia relativas à segurança dos produtos.

Este livro foi produzido e publicado por 24bookprint.com.

Em caso de dúvidas sobre a segurança do produto, contacte:

24bookprint.com
Delftsestraat 33
3013AE Rotterdam
Holanda

info@24bookprint.com

Conteúdo

Prefácio

De entre os professores e alunos a quem devo gratidão, trago para aqui dois nomes que, por razões distintas, simbolizam muito do que este livro lhes deve.

No mestrado em Análise Funcional do IST, em 1998, tive o Professor Jaime Campos Ferreira. As suas aulas foram um exemplo raro de clareza, rigor e organização. Nas longas demonstrações escrevia no quadro com uma precisão impressionante. Passo a passo, desenvolvia os argumentos, ia apagando para ganhar espaço, mas deixava sempre visíveis as partes que mais adiante voltariam a ser utilizadas. Tudo parecia cuidadosamente pensado mas, no entanto, tudo decorria com uma naturalidade extraordinária. Formado numa notável tradição da escola matemática portuguesa, consolidada a partir da década de 1940 e que teve em José Vicente Gonçalves e José Sebastião e Silva duas das suas figuras mais marcantes, Campos Ferreira e outros, deram continuidade a uma escola em que também me formei. Foi esse modo de ensinar, rigoroso e exigente, que procurei trazer para as minhas aulas e para as muitas páginas que fui escrevendo ao longo dos anos.

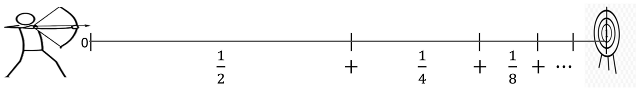
No curso de Contabilidade do ISCAL, em 2011, tive o aluno cabo-verdiano Luís Tavares. Numa prova de séries, na matéria mais exigente, obteve a classificação máxima de 20 valores. Com uma limitação visual acentuada, o Luís lia os enunciados com os olhos quase colados ao papel e nunca pediu facilidades. Mas o que mais me impressionava era a forma como entendia a matéria e a explicava aos colegas. Vi-o dizer-lhes que era preciso arrumar a matéria em pequenas gavetas, para que, em cada exercício, se abrisse a gaveta certa e dela se retirasse a resposta que a questão exigia.

Ler um livro que tem muitas demonstrações, como este, exige mais de quem os lê, mas também lhes pode dar muito mais. A herança de rigor e exigência é o que sempre procuro transmitir.

1 Séries de números reais

1.1 Os Paradoxos de Zenão - o problema da flecha

O *filósofo* grego *Zenão de Eleia* (495-435 a.C) colocou aos matemáticos um conjunto de problemas que ficaram conhecidos por *Paradoxos de Zenão*, desencadeando uma crise no pensamento matemático do seu tempo e que perdurou por mais de 2000 anos. Por exemplo, o *problema da flecha* que para percorrer a distância do atirador ao alvo tem que percorrer, primeiro metade dessa distância, depois a nova metade da distância em falta e, assim sucessivamente.



Restando sempre novas metades para percorrer, como se explica que a flecha atinja o alvo?

No final do séc XVII e início do séc. XVIII, os matemáticos concretizaram a generaliação do conceito de soma, o resultado da adição, agora a um número infinito de parcelas, criando a teoria das Séries e resolvendo a contradição. A distância percorrida pela flecha é obtida à custa de adicionar infinitas parcelas passando a escrever-se:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{2^n} + ... = 1$$

ou, mais abreviadamente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

Para os gregos, a materialização do infinito não podia ser considerada. Seria como igualar Deus ao Homem, uma heresia! Do ponto de vista da Filosofia, depois de resolvido o problema matemático, passou a falar-se de *infinito em potência* e *infinito em ato*. As infinitas metades do percurso representam o infinito em potência e a soma de todas elas é o infinito atualizado, acabado ou materializado.

O problema matemático resolve-se calculando o limite da sucessão

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{2} \\
s_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\
s_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Reparando que os termos de sucessão (s_n) podem-se escrever na forma

$$s_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

chega-se ao limite 1:

$$\lim s_n = \lim \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 - 0 = 1$$

Nota 1.1

A definição de série baseia-se na sucessão das somas parciais (s_n), a que se chama sucessão associada à série. Uma vez que o limite desta sucessão é finito, de acordo com a definição adotada (a ver mais adiante), a série representada pela expressão $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ diz-se uma *série convergente*; às parcelas do somatório chamam-se os *termos da série*; ao valor do $\lim_{n\to+\infty} s_n = 1$ chama-se a *soma da série*:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

No *problema da flecha*, (s_n) é uma sucessão crescente e limitada superiormente (majorada) por 1. O que se vai adicionando é uma quantidade cada vez mais pequena (tende para zero) e tão pequena que por mais parcelas que se acrescentem o resultado é sempre inferior a 1. No entanto, como veremos no exemplo que se segue, não é o simples facto de o termo geral tender para zero que faz com a série seja convergente.

1.2 A divergência da série harmónica

Consideremos a seguinte sucessão de somas:

$$s_1 = 1,\ s_2 = 1+\frac{1}{2},\ \ s_3 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, ..., s_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}, ...$$

Neste caso, (s_n) também é monótona crescente e portanto existe $\lim s_n$, finito ou $+\infty$ (na revisão, A5, pág. 97). Vamos ver (por exclusão) que não pode ser finito:

Se (s_n) convergisse para $s \in \mathbb{R}$ então a subsucessão dos termos de ordem par (s_{2n}), também teria o mesmo limite (revisão, A5) e ter-se-ia $\lim(s_{2n} - s_n) = s - s = 0$.

Ora, isto não pode acontecer pois, $s_{2n} - s_n \geq \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, como se pode mostrar:

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n} \geq$$
$$\geq \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + ... + \frac{1}{n+n} = \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Assim, a série representada por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

é divergente, pois $s_n \to +\infty$.[1]

Nota 1.2

Estes 2 exemplos, de convergência e divergência, mostram bem a importância dos infinitésimos: na perspetiva dos problemas colocados por Zenão desde que se somassem infinitas parcelas o resultado deveria ser infinito. Nem tanto, nem tão pouco, pois os infinitésimos não são todos de desprezar – "com infinitésimos podemos obter ∞”. Veremos mais adiante que se $\lim a_n \neq 0$ então a série é divergente (condição necessária de convergência, Teorema 1.5, pág.14).

[1] Traduzindo em números: de cada vez que se duplicam as parcelas o resultado aumenta pelo menos 0.5. Consequentemente, quadruplicando as parcelas o resultado aumenta pelo menos 1 unidade – com 4 parcelas o resultado é superior a 2, com 16 parcelas é superior a 3, com 64 parcelas é superior de 4, etc. Assim, podemos perceber ainda melhor porque razão $s_n \to +\infty$.

1.3 A definição de série

Definição 1.3 Dada uma sucessão de números reais (a_n), considere-se a seguinte *sucessão de somas parciais*:

$$\begin{array}{rcl} s_1 & = & a_1 \\ s_2 & = & a_1 + a_2 \\ & & \vdots \\ s_n & = & a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ & & \vdots \end{array}$$

Ao par de sucessões $(a_n, s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ chama-se *série*. Os termos de (a_n) chamam-se *termos da série*. O termo geral é a_n. A sucessão (s_n) é a *sucessão associada à série*.

– Se $\lim s_n = s \in \mathbb{R}$ (finito) a série diz-se *convergente* com *soma* s e se $\lim s_n = +\infty$ ou $\lim s_n = -\infty$ então a série diz-se *divergente infinita*[2]; consoante o caso, podemos escrever:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s \quad ou \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty \quad ou \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\infty$$

– Se (s_n) não tem limite então a série diz-se apenas *divergente*.

Questões de linguagem:

Da expressão $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diz-se que é a expressão que representa, ou define a série, no entanto, por uma questão de simplificação de linguagem, é usual chamar-se *série* à própria expressão do somatório. Aliás, muitos autores fazem-no logo na definição, sem rodeios. Este procedimento, não deixando de ser criticável, do ponto de vista formal, é inconsequente, uma vez que, se é certo que se está a definir um novo conceito, à custa do que, afinal, é o que se quer definir (a adição com infinitas parcelas), também é verdade que logo se coloca o foco no limite da sucessão (s_n), e tudo segue em conformidade.

[2] Quando o $\lim s_n$ existe, mas é infinito ($+\infty$ ou $-\infty$), há autores que consideram que a série não tem soma e outros que consideram ter soma infinita mas é apenas uma questão de linguagem, sem consequências no desenvolvimento teórico e prático.

Definição alargada: A definição de série pode estender-se de modo a que o seu início possa ser em um qualquer $p \in \mathbb{N}_0$. É a série que se representa por $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ e onde a respetiva sucessão associada passa a ser:

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_p \\
s_2 &= a_p + a_{p+1} \\
&\vdots \\
s_n &= a_p + a_{p+1} + ... + a_{p+n-1} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Mostra-se a seguir que a *natureza* duma série, *convergente ou divergente*, não depende de onde ela se inicia. Por isso, quando apenas se quer referir a sua natureza, é usual representá-la apenas por $\sum a_n$.

Teorema 1.4 Qualquer que seja $p \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$ representam séries da mesma natureza.

Demonstração: Se s_n e s'_n são os termos gerais das sucessões associadas às séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$, respetivamente, tem-se,

$$s_n = a_0 + a_1 + ... + a_{n-1} \quad \text{e} \quad s'_n = a_p + a_{p+1} + ... + a_{n+p-1}$$

sendo que s'_n e s_n diferem apenas dum número real; de facto, podemos verificar que

$$s'_n = s_n - A + B$$

com $A = a_0 + a_1 + ... + a_{p-1}$ e $B = a_n + a_{n+1} + ... + a_{n+p-1}$

onde tanto A como B se obtêm através da adição de um número finito de parcelas, mais precisamente, p parcelas[3] e, portanto, $-A + B \in \mathbb{R}$. Assim, se (s_n) é convergente então também o é (s'_n) e vice-versa ∎

[3] No enunciado p é um inteiro qualquer, mas fixado previamente.