*Ana Luísa Correia*
*Carla Martinho*

# Matrizes e Aplicações

Inclui Exercícios de Escolha Múltipla
com resolução detalhada

ESCOLAR EDITORA

*Ana Luísa Correia*
*Carla Martinho*

# Matrizes e Aplicações

Inclui Exercícios de Escolha Múltipla
com resolução detalhada

ESCOLAR EDITORA

**Matrizes e Aplicações**

*Ana Luísa Correia, Carla Martinho*


Polígono Industrial do Forte da Casa
Rua do Comércio e Indústria, 19
2625–437 Forte da Casa
**Telefone:** 211 066 500 **Fax:** 211 066 530
**E-mail:** editora@escolareditora.com
**Internet:** http://www.escolareditora.com



**ISBN** 978–972–592–596–6
**Impressão** Outubro de 2022
**Depósito Legal** n.º 506 197/22

**Coordenação editorial**
João Costa

**Capa**
João Loureiro

**Impressão e acabamento**
Gráfica Manuel Barbosa & Filhos

# Índice

# Lista de símbolos

| | |
|---|---|
| $\mathbb{R}^n$ | conjunto dos $n$-uplos de números reais. 1, 141 |
| $a_{ij}$ ou $A_{ij}$ | entrada $(i, j)$ da matriz $A$. 2 |
| $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ | conjunto das matrizes de tipo $m\times n$ com entradas em $\mathbb{R}$. 2 |
| $0_{m\times n}$ | matriz nula de tipo $m\times n$. 3 |
| $0_n$ | matriz nula de ordem $n$. 3 |
| $\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ | matriz diagonal com $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ na diagonal principal. 5 |
| $I_n$ | matriz identidade de ordem $n$. 5 |
| $\emptyset$ | conjunto vazio. 7 |
| $A^k$ | potência de expoente $k$ da matriz $A$. 13 |
| $A^T$ | matriz transposta da matriz $A$. 14 |
| $\mathrm{tr}(A)$ | traço da matriz $A$. 24 |
| $L_i \leftrightarrow L_j$ | troca da linha $L_i$ com a linha $L_j$. 39 |
| $L_i \to \alpha L_i$ | substituição da linha $L_i$ por $\alpha L_i$. 39 |
| $L_i \to L_i + \alpha L_j$ | substituição da linha $L_i$ por $L_i + \alpha L_j$. 39 |
| $A \underset{\text{(linhas)}}{\longrightarrow} B$ | $A$ é equivalente por linhas a $B$. 39 |
| $C_i \leftrightarrow C_j$ | troca da coluna $C_i$ com a coluna $C_j$. 42 |
| $C_i \to \alpha C_i$ | substituição da coluna $C_i$ por $\alpha C_i$. 42 |
| $C_i \to C_i + \alpha C_j$ | substituição da coluna $C_i$ por $C_i + \alpha C_j$. 42 |
| $\mathrm{c}(A)$ | característica da matriz $A$. 54 |
| $A^{-1}$ | matriz inversa da matriz $A$. 60 |
| $C_{(S)}$ | conjunto solução do sistema $(S)$. 88 |
| $[A \mid B]$ | matriz ampliada de $AX = B$. 90 |
| $\therefore$ | portanto, logo. 93 |
| g.i. | grau de indeterminação. 100 |
| $\forall$ | para todo, para qualquer. 141 |
| $\exists$ | existe, para algum. 141 |
| $\vec{0}_E$ | vetor nulo do espaço $E$. 141 |

# Capítulo 1

# Matrizes - generalidades

As matrizes são uma ferramenta importante da Álgebra Linear, especialmente porque são muito úteis na resolução dos sistemas de equações lineares, como veremos no Capítulo 3. Além da sua utilidade no estudo deste tipo de sistemas, as matrizes aparecem de forma natural em geometria, estatística, economia, física, etc. Atualmente a teoria das matrizes é ampliamente utilizada na informática. De facto, o uso das matrizes constitui uma parte essencial das linguagens de programação, uma vez que a maioria dos dados são introduzidos nos computadores como tabelas organizadas em linhas e em colunas.

A utilização de tabelas de números, para a resolução de sistemas de equações lineares, foi encontrada em vários textos chineses escritos entre os séculos X a II a.C. Ao longo dos séculos, foram feitos desenvolvimentos valiosos neste campo, muito especialmente nos séculos XVIII e XIX. Destacamos, em particular, os matemáticos Leibniz, Cramer, Cayley, Hermite, Jacobi, mas muitos outros tiveram contribuições importantes. No entanto, o termo "matriz" apareceu pela primeira vez em 1850 e foi introduzido pelo algebrista inglês J. J. Sylvester. E a notação moderna $A = [a_{ij}]$ foi introduzida por C. E. Cullis em 1913.

## 1.1 Definições básicas e exemplos

Ao longo deste livro, $\mathbb{R}$ denotará o conjunto dos números reais e os seus elementos serão designados por *escalares*. Usamos ainda $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}_0$ para denotar os números naturais e os números naturais com o zero

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}\ ,\ \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Além disso, $\mathbb{R}^n$ denota o conjunto dos $n$-uplos de números reais

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

**Definição.** Chama-se ***matriz de tipo*** $m \times n$, sobre $\mathbb{R}$, a um quadro/tabela com $m \cdot n$ elementos em $\mathbb{R}$, ditas entradas, dispostos em $m$ linhas e $n$ colunas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n}.$$

- O escalar $a_{ij}$ ou $A_{ij}$ designa a ***entrada*** ou o ***elemento*** $(i, j)$ de $A$.
- O $n$-uplo $L_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$ designa a ***linha*** $i$ de $A$.
- O $m$-uplo $C_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}) \in \mathbb{R}^m$ designa a ***coluna*** $j$ de $A$.
- O conjunto de todas as matrizes de tipo $m \times n$ com entradas em $\mathbb{R}$ é, usualmente, denotado por $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ ou por $\mathbb{R}^{m \times n}$.

**Exemplo 1.1.** **(a)** Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$.

$A$ é uma matriz de tipo $2 \times 3$ − tem 2 linhas e 3 colunas.

Portanto $A \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$.

Temos, por exemplo, $a_{13} = 0$, $a_{21} = -1$ e $a_{23} = 3$.

A linha 1 e a coluna 2 são respetivamente:

$$L_1 = (1, -2, 0) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad C_2 = (-2, 5) \in \mathbb{R}^2.$$

**(b)** Consideremos a matriz $A = [\,3\,]$.

Esta matriz é de tipo $1 \times 1$, ou seja $A = [\,3\,] \in \mathcal{M}_{1 \times 1}(\mathbb{R})$.

Só tem uma entrada: $a_{11} = 3$.

Só tem uma linha e uma coluna: $L_1 = (3) = C_1 \in \mathbb{R}$.

As matrizes aparecem em várias formas: retangulares ou quadradas dependendo do número de linhas e de colunas.

**Definição.** Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

- Se $m \neq n$ a matriz $A$ diz-se ***retangular***.
- Se $m = n$ a matriz diz-se ***quadrada de ordem*** $n$.
- Se todas as entradas da matriz $A$ forem nulas, i.e. se $a_{ij} = 0$ para todos $i, j$, então $A$ diz-se a matriz ***nula de tipo*** $m \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = 0_{m\times n}.$$

  Se $m = n$ escreve-se, simplesmente, $0_n$ em vez de $0_{n\times n}$.

- $A$ diz-se uma ***matriz linha*** se tiver uma única linha, ou seja se $m = 1$.
- $A$ diz-se uma ***matriz coluna*** se tiver uma única coluna, ou seja se $n = 1$.

**Exemplo 1.2.**

**(a)** $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & 1 & -5 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ - matriz quadrada de ordem 3.

**(b)** $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & \sqrt{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ - matriz retangular de tipo $2 \times 3$.

**(c)** $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & 15 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 4}(\mathbb{R})$ - matriz linha de tipo $1 \times 4$.

**(d)** $D = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ - matriz coluna de tipo $3 \times 1$.

O conceito de igualdade de matrizes é o esperado.

**Definição.** Duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ do mesmo tipo $m \times n$ dizem-se ***iguais***, e escreve-se $A = B$, se **todas** as entradas correspondentes (ou elementos homólogos) forem iguais, i.e. se

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \text{para todos } i \in \{1, \dots, m\},\ j \in \{1, \dots, n\}.$$

**Exemplo 1.3.**

**(a)** As matrizes do Exemplo 1.2 são todas distintas porque são matrizes de tipo diferente.

**(b)** Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$. As matrizes $A$ e $B$ são do mesmo tipo, mas temos $a_{13} = 0 \neq 1 = b_{13}$, logo $A \neq B$.

**(c)** Sejam $A = \begin{bmatrix} 2^3 & \operatorname{sen}(\pi/2) \\ \cos(\pi) & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ -1 & \ln 1 \end{bmatrix}$. As matrizes $A$ e $B$ são do mesmo tipo e são iguais porque: $a_{11} = 2^3 = 8 = b_{11}$, $a_{12} = \operatorname{sen}(\pi/2) = 1 = b_{12}$, $a_{21} = \cos(\pi) = -1 = b_{21}$ e $a_{22} = 0 = \ln 1 = b_{22}$.

## Matrizes quadradas:

Vamos supor $m = n$. As matrizes quadradas admitem as seguintes classificações.

**Definição.** Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz quadrada de ordem $n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{n\times n}.$$

- As entradas $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ constituem a ***diagonal principal*** da matriz $A$.

- Se todas as entradas **acima** da diagonal principal forem nulas, i.e. se $a_{ij} = 0$ para $i < j$, a matriz $A$ diz-se ***triangular inferior***:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

- Se todas as entradas **abaixo** da diagonal principal forem nulas, i.e. se $a_{ij} = 0$ para $i > j$, a matriz $A$ diz-se ***triangular superior***:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

- Se todas as entradas **acima** e **abaixo** da diagonal principal forem nulas, i.e. se $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, a matriz $A$ diz-se ***diagonal***:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}).$$

- Uma matriz **diagonal** com todas as entradas da diagonal principal **iguais** diz-se uma matriz ***escalar***, ou seja uma matriz escalar tem a forma

$$A = \text{diag}(a, a, ..., a)_n.$$

Em particular, se $a = 1$ a matriz $A = \text{diag}(1, 1, ..., 1)_n$ é conhecida por ***matriz identidade de ordem*** $n$. Neste caso, é mais comum usarmos a notação $I_n$ em vez de $\text{diag}(1, 1, ..., 1)_n$.

**Exemplo 1.4.**

**(a)** $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ - é uma matriz triangular inferior.

**(b)** $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ - é uma matriz triangular superior.

**(c)** $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{diag}(-1, 2, 0)$ - é uma matriz diagonal.

**(d)** $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \text{diag}(5,5,5)$ - é uma matriz escalar.

**(e)** $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ - matriz identidade de ordem 2;

$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ - matriz identidade de ordem 3.

## Exercícios resolvidos:

**1.1.1 .** Considere as seguintes matrizes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},\ A_5 = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix},\ A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_7 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix},$$

$$A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix},\ A_9 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ A_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ A_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_{14} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Indique

**(a)** O tipo de cada matriz;

**(b)** Quais as matrizes que são quadradas;

**(c)** Quais as matrizes que são triangulares superiores ou inferiores;

**(d)** Quais as matrizes que são diagonais;

**(e)** Quais as matrizes que são escalares.

# Matrizes e Aplicações

As autoras deste livro são professoras universitárias com larga experiência de lecionação na área da Matemática, nomeadamente em Álgebra Linear, em diferentes instituições de ensino superior e a diferentes cursos: Matemática, Física, Química, Informática, Engenharia, Economia, Finanças e Gestão.

Este livro foi pensado essencialmente para dar resposta às diversas solicitações dos estudantes que se cruzaram nos seus percursos académicos. O seu conteúdo pode ser usado tanto como texto de apoio, onde os resultados mais simples estão justificados, bem como caderno de exercícios com resoluções detalhadas.

Nos dois primeiros capítulos, são fornecidas as técnicas necessárias para a teoria de matrizes ser aplicada na resolução de sistemas de equações lineares e no estudo de espaços vetoriais.

Este livro contém exercícios de aplicação direta dos conceitos estudados, exercícios de escolha múltipla com resolução detalhada, e vários exercícios aplicados aos diferentes ramos da ciência, fruto da experiência das autoras no ensino da Álgebra Linear.

ESCOLAR EDITORA
polytechnica INTERNACIONAL
ESCOLAREDITORA.COM
ISBN 978-972-592-596-6
9 789725 925966

**Ana Luísa Correia**

Licenciada em Matemática, ramo de especialização científica pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (FCUL), Mestre em Matemática, ramo de Álgebra, pela FCUL e Doutorada em Matemática pelo Instituto Superior Técnico (IST) da antiga Universidade Técnica de Lisboa (UTL).

Começou a sua carreira académica na FCUL e foi também docente da Universidade Aberta. Atualmente é Professora Auxiliar do Departamento de Ciências Exatas e Engenharias na Academia Militar.

Nesse sentido tem também desenvolvido interesses no Ensino da Matemática nas Instituições Militares no século XIX e 1ª metade do século XX, no âmbito da História da Matemática.

É membro do Centro de Análise Funcional e Estruturas Lineares e Aplicações (CEAFEL) da FCUL. Desenvolve investigação na área de Álgebra Comutativa, sendo autora de vários artigos científicos nessa área, publicados em revistas internacionais.

É membro da Sociedade Portuguesa de Matemática e fez parte da sua direção nos biénios 2014–16, 2016–18, 2018–20.

**Carla Martinho**

Licenciada em Matemática Aplicada às Ciências Actuariais pela Faculdade de Ciências e Tecnologia (FCT) da Universidade Nova de Lisboa (UNL), Mestre em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão, pelo Instituto Superior de Economia e Gestão (ISEG) da antiga Universidade Técnica de Lisboa (UTL) e doutorada em C. da Educação e Desenvolvimento, pela FCT da UNL.

Professora em várias instituições de ensino superior desde 1993, sendo atualmente Professora Adjunta no Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Lisboa (ISCAL) do Instituto Politécnico de Lisboa (IPL) e membro integrado do Centro de Investigação ICPOL — Unidade ID&I do ISCPSI.

Desenvolve investigação em métodos quantitativos aplicados às ciências empresariais e em metodologias e avaliação do ensino, presencial e a distância, tendo várias comunicações e artigos publicados nessas áreas. Coordena o projeto de investigação MOOCS4ALL, estatística e matemática para todos, financiado pela 7ª edição do IDI&CA do IPL 2022.

É membro da Sociedade Portuguesa de Estatística e da Sociedade Portuguesa de Matemática, tendo feito parte da sua direção nos biénios 2014–16 e 2016–18.