
Grupo I (2,0 val)

Designando por $\bar{X}$ o conjunto $\mathbb{R} \setminus X$, ou seja, o conjunto dos números reais que não pertencem a X e sendo $A = [-3; 5[$, $B = \mathbb{R}^+ \setminus \{5\}$ e $C = \{1; 3; 5\}$, determine o conjunto $\overline{(A \cup B) \cap C}$.

- Sugestão: se necessário, recorra à representação dos conjuntos na reta real.

Grupo II (2,0 val)

Resolva o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x = \frac{1}{2}(-4 + 8y) \end{cases}$$

Grupo III (4,5 val)

Considere as funções polinomiais definidas por:

$$A(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1, \quad B(x) = x - 2 \quad \text{e} \quad C(x) = x^2 - 9;$$

- a) [1,5] Calcule o quociente $Q(x)$ e o resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$. Em função do resultado obtido, complete a seguinte identidade $\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \dots$.
- b) [1,5] Efetue o produto $B(x) \times C(x)$ e determine os seus zeros.
- c) [1,5] Resolva a inequação $C(x) \leq 3B(x) - 5$.

Grupo IV (5,0 val)

Considere a sucessão de números reais definida por $u_n = \frac{n+1}{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$).

- a) [1,5] Verifique se $\frac{21}{41}$ é termo da sucessão e, em caso afirmativo, indique a sua ordem.
- b) [1,5] Determine $u_{n+1} - u_n$ e, a partir da expressão obtida, classifique a sucessão quanto à monotonia e diga se (u_n) é ou não uma progressão aritmética.
- c) [2,0] Calcule $\lim u_n$ e $\lim (2u_n)^n$.

Grupo V (6,5 val)

Considere as funções reais de variável real definidas por:

$$f(x) = 3e^{x-2} - 2 \quad \text{e} \quad g(x) = 2x - \ln(x^2)$$

- a) [1,5] Indique os respetivos domínios.
- b) [1,5] Responda a uma e uma só das seguintes alíneas, à sua escolha (a resposta às duas implica a correção apenas da primeira):
 - i) Sabendo que f é injetiva, caracterize a sua inversa.
 - ii) Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 1}{x - 2}$.
- c) [2,0] Mostre que $g'(x) = \frac{2x-2}{x}$ e determine uma equação da reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa 1.
- d) [1,5] Partindo da expressão de g' dada na alínea anterior, estude a monotonia e os extremos da função g .

Formulário

Para qualquer $k \in \mathbb{R}$ e quaisquer funções reais de variável real u e v , diferenciáveis tem-se:

Regras de derivação:

$$(k)' = 0$$

$$(u^k)' = k \times u^{k-1} \times u'$$

$$(k \times u)' = k \times u'$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$$

Limites notáveis: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$;

Sucessões:

Monotonia: (a_n) é monótona crescente se e só se $a_{n+1} - a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Progressão aritmética de razão $r \in \mathbb{R}$: $a_{n+1} - a_n = r, \forall n \in \mathbb{N}$